

CONCOURS D'ENTREE EN 1<sup>ère</sup> ANNEE ANALYSTE-PROGRAMMEUR  
SESSION 2009

**Epreuve de Mathématiques générales**

Durée : 4 heures. Sans document. Coefficient 06.

Ce sujet comporte trois (03) pages.

*N.B. N'utiliser que la feuille de composition mise à votre disposition. La copie ne doit pas être signée et ne devra porter aucun signe distinctif.*

**Exercice 1**

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres de  $M$ .  
(b) La matrice  $M$  est-elle inversible?  
(c) Déterminer une matrice inversible  $P$  et une matrice  $D$  diagonale telle que l'on ait  $M = PDP^{-1}$ .  
(d) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $M^n$ .
2. Calculer  $M^2$ ; Exprimer  $M^2$  en fonction de  $M$  et retrouver l'expression de  $M^n$ .
3. On considère les deux suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  définies par leurs premiers termes  $u_0 = 1, v_0 = 0$ , et par les relations:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{cases}, (n \in \mathbb{N}).$$

A l'aide de la matrice  $M$ , exprimer

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

en fonction de

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

En déduire l'expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis les limites de  $u_n, v_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 2**

Soit  $E, F$  deux ensembles ayant respectivement  $m$  et  $p$  éléments avec  $m, p$  entiers naturels non nuls. On rappelle que :

Définir une relation  $\mathcal{R}$  sur  $E \times F$  c'est choisir une partie non vide  $G$  dans  $E \times F$ .

Notation : si  $(x, y) \in G$ , on l'exprime par  $x\mathcal{R}y$ . On dit que  $\mathcal{R}$  est une fonction sur  $E$  à valeurs dans  $F$  si  $x\mathcal{R}y$  et  $x\mathcal{R}z$  impliquent  $y = z$ , pour tout  $x \in E$  et pour tout  $y, z \in F$ ; Dès lors on note  $y = \mathcal{R}(x)$  au lieu de  $x\mathcal{R}y$ .

De même on dit que  $\mathcal{R}$  est une application de  $E$  dans  $F$  si chaque élément  $x \in E$  est en relation avec un unique élément  $y \in F$ .

1. Combien de relations peut-on définir sur  $E \times F$ ?
2. Combien d'application peut-on définir de  $E$  dans  $F$ ?
3. Combien de fonctions peut-on définir sur  $E$  à valeur dans  $F$ ?  
On rappelle qu'une application  $\mathcal{R}$  de  $E$  dans  $F$  est bijective si pour chaque élément  $y \in F$ , il existe un unique élément  $x \in E$  tel que  $y = \mathcal{R}(x)$ . On suppose désormais  $m = p$ .
4. Combien d'applications bijectives peut-on définir de  $E$  sur  $F$ ?

### Exercice 3 .

#### Partie A : étude d'une fonction.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \ln(1 + x^2).$$

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Montrer que  $f$  est une fonction paire.
2. Etudier ses variations et préciser sa limite en  $+\infty$ .
3. Montrer que  $f(x)$  est équivalent à  $2\ln(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . En déduire la nature de la branche infinie de  $C$  en  $+\infty$ .
4. Construire  $C$  ainsi que ses tangentes à l'abscisse 0 et aux points d'inflexion. On donne  $\ln(2) \approx 0,7$ .

#### Partie B : étude d'une intégrale.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx.$$

1. Calculer  $I_0$ .

(a) Calculer  $I_0 + I_1$ .

(b) En déduire  $I_1$ .

(a) Quel est le signe de  $I_n$  ?

(b) Montrer que  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+2}$ .

(c) En déduire que  $I_n \leq \frac{1}{2n+2}$ .

(d) Montrer que la suite  $(I_n)_n$  est convergente et calculer sa limite.

#### Partie C : étude d'une série.

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul :

$$2(-1)^{n+1}I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2.$$

(b) En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx.$$

(b) Etablir les inégalités :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}.$$

(c) En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n.$$

2. A l'aide des questions précédentes, donner un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .